Odbitka z „Polskiego Przeglądu Kartograficznego", zeszyt 46, 1934 r.

JERZY SMOLEŃSKI, Kraków.

W SPRAWIE MORFOGRAFJI SPADKÓW.

Sur la morphographie des pentes.

Znana i spopularyzowana przez podręczniki geografji krzywa hipsograficzna, stosowana w morfometrji do obliczania objętości i średniej wysokości, jest — jak wiadomo — diagramem, uzmysławiającym wzajemny stosunek wielkości powierzchni leżących w różnych piętrach hipsometrycznych. Wielkość powierzchni poziomych, objętych poszczególnemi izohipsami, zaznaczona tu zostaje proporcjonalną do niej długością odcinków na jednej z prostopadłych osi współrzędnych, ich wzniesienie na drugiej. Większe lub mniejsze nachylenie poszczególnych części krzywej nie jest wyrazem spadku terenu między dwiema izohipsami, lecz funkcją stosunku różnicy wielkości przekrojów poziomych, objętych temi izohipsami, do ich odstępu pionowego. Dlatego interpretacja krzywej hipsograficznej jako (średniego) profilu jest niedopuszczalna. Trafiające się próby takiej interpretacji, polegające na niezrozumieniu istoty konstrukcji omawianej krzywej, spotkały się zaraz z słuszną krytyką i jako zasadniczo błędne zostały odrzucone.

Nie nadającą się do analizy stosunków spadkowych krzywą hipsograficzną starał się ostatnio[1] zastąpić dr F. Uhorczak konstrukcją t. z. *hipsografoidy*, względnie *krzywej hipsografoidalnej*. Ma ona równocześnie wyrażać stosunek wielkości powierzchni leżących w różnych poziomach oraz uzmysławiać średni spadek terenu w różnych piętrach wysokościowych. Jest to diagram różniący się od krzywej hipsograficznej tem, że na osi rzędnych zamiast wielkości powierzchni, których wysokość odczytujemy na osi odcinków, zaznacza się promienie kół równoważnych tym powierzchniom. Długość promieni pozwala obliczyć z krzywej rozmiary odnośnych powierzchni a następnie obję-

[1] C. R. Internat. Congrès de Géogr. — Paris 1931. — Vol. I, p. 328—41.

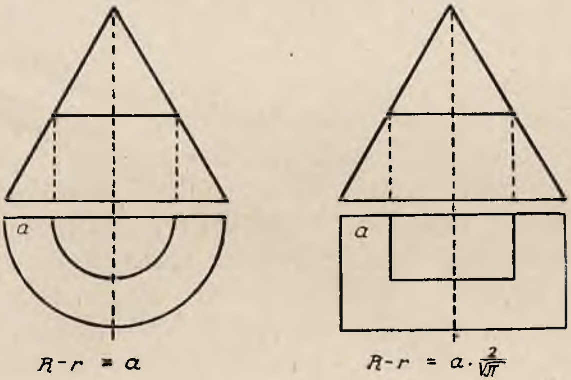
tość i średnią wysokość formy. Pod tym względem krzywa hipsografoidalna może więc oddawać podobne usługi co krzywa hipsograficzna, choć rachunek jest więcej skomplikowany. Czy jednak jest ona równocześnie „wiernokątową“, — i czy wolno na jej podstawie (jak to czyni jej projektodawca) analizować stosunki spadkowe lądów, oceanów, dorzeczy?

1. W przebiegu krzywej hipsografoidalnej spadek między poszczególnemi poziomami hipsometrycznemi wyraża stosunek pionowego odstępu tych poziomów do różnicy promieni kół równoważnych powierzchniom poziomym, objętym granicznemi izohipsami:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{R - r}.$$

Ta różnica $R - r$ winna się równać średniemu odstępowi poziomemu wspomnianych izohips, jeśli nachylenie krzywej w danym odcinku zgadzać się ma z średnim spadkiem strefy warstwicowej. W przypadku bryły o kształcie stożka zgodność tych wartości jest oczywista, — dla innych jednak form rzecz przedstawia się odmiennie.

Przykład 1:



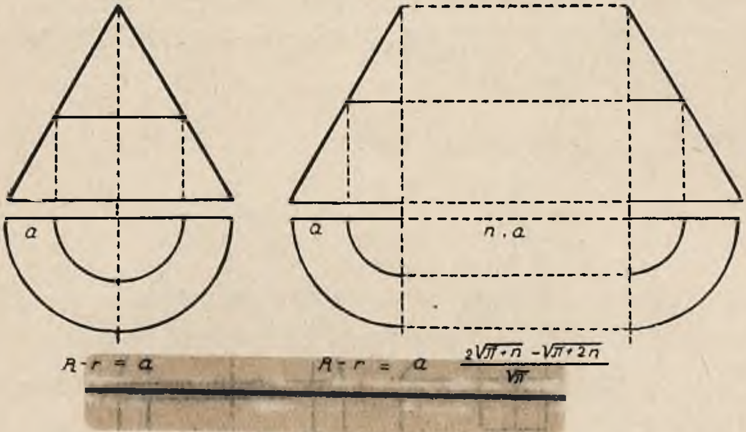
Rys. 1.

Weźmy pod uwagę prosty stożek i prosty ostrosłup kwadratowy (rys. 1) o tej samej wysokości a boku podstawy równym średnicy podstawy stożka. Odstęp poziomy izohips, obliczony znanym wzorem $a = \frac{2\,p}{i_1 + i_2}$, jest u obu figur ten sam[2]. Mimo to ich krzywe hipso-

[2] p jest powierzchnią poziomą ograniczoną rzutami dwóch izohips, zaś i_1 oraz i_2 długością tych izohips.

grafoidalne wykażą odmienne nachylenie, — gdy bowiem dla stożka różnica promieni dwóch przekrojów poziomych $R - r = a$, dla ostrosłupa różnica promieni kół równoważnych analogicznym przekrojom poziomym $R - r = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}$.

Przykład 2:



Rys. 2.

Przepołówmy wspomniany wyżej prosty stożek o odstępie poziomym izohips $= a$ płaszczyzną pionową i rozsunąwszy połowy połączmy rozcięte ściany. Otrzymamy grzbiet dachowaty (rys. 2), o zaokrąglonych końcach, ale o spadku powierzchni tym samym co u pierwotnego stożka, gdyż odstęp poziomy izohips (a) pozostał ten sam. Gdy grzbiet ten przedłużać będziemy o wartość a, $2a$, $3a$, ... na, nachylenie zboczy nie zmieni się, — natomiast krzywa hipsografoidalna wykaże za każdym razem inne nachylenie. Miarodajna dla tego nachylenia różnica $R - r$, która dla stożka wynosiła (a), przybierze kolejno wartości:

$$a \cdot \frac{2\sqrt{\pi + 1} - \sqrt{\pi + 2}}{\sqrt{\pi}},\ a \cdot \frac{2\sqrt{\pi + 2} - \sqrt{\pi + 4}}{\sqrt{\pi}},\ a \cdot \frac{2\sqrt{\pi + 3} - \sqrt{\pi + 6}}{\sqrt{\pi}},\ \ldots\ldots$$

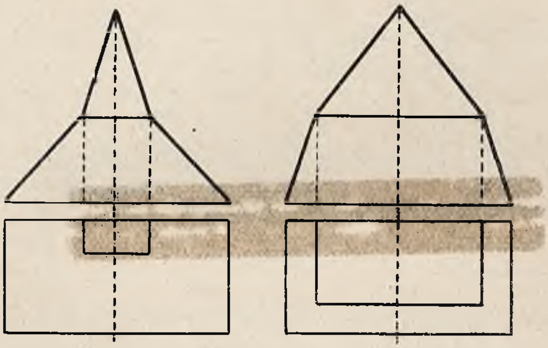
$$\ldots\ a \cdot \frac{2\sqrt{\pi + n} - \sqrt{\pi + 2n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Słowem, nachylenia krzywych hipsografoidalnych figur o różnej postaci ale tem samem nachyleniu ścian jest różne, do porównawczej analizy spadków służyć więc nie może.

2. Krzywa hipsografoidalna może jednak do pewnego stopnia i w pewnych przypadkach ilustrować charakter hipsometrycznego

zróżnicowania spadków w obrębie tej samej formy. I tak, w przytoczonym wyżej przykładzie stożka i bryły dachowatej, mającej ten sam spadek powierzchni, krzywa hipsografoidalna wprawdzie u drugiej z tych form błędnie przedstawi wielkość tego spadku, — niemniej w obu przypadkach wykaże przebieg prostolinijny, nachylenie jednostajne, zaznaczając, że spadki analizowanych powierzchni są we wszystkich poziomach te same. Również załamanie spadku na zboczach form przedstawionych na rys. 3 znajdzie wyraz w kształcie krzywej hipsografoidalnej, która wypukłą będzie dla formy 1, wklęsłą dla 2.

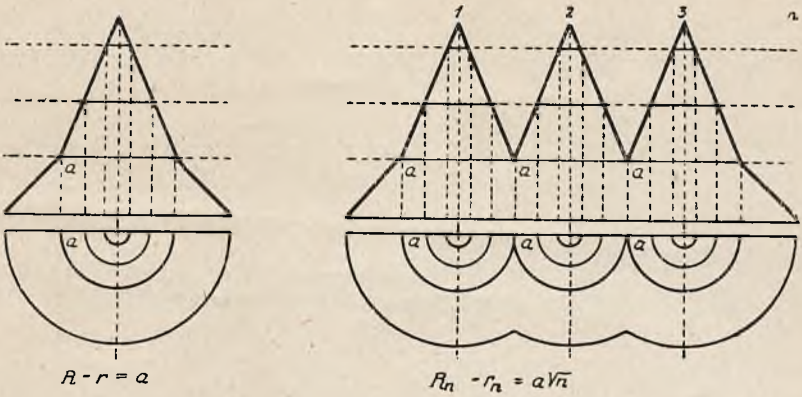
Przykład:



Rys. 3.

Odnosi się to jednak do niektórych form nieskomplikowanych, i to takich, w których każdy poziom hipsometryczny tworzy na mapie warstwicowej jedno pole. Większe obszary rzadko temu warunkowi odpowiadają. Zazwyczaj z pewną wysokością (lub głębokością u form wklęsłych) na jeden poziom hipsometryczny składa się kilka izolowanych pól. Jest to regułą, gdy chodzi o całe lądy lub oceany, łańcuchy górskie etc. — Przy konstrukcji krzywej hipsograficznej powierzchnie tych pól się dodaje a sumę zaznacza linjowo na osi poziomej diagramu. W konstrukcji krzywej hipsografoidalnej współrzędne wyrażające wielkość powierzchni zastępuje się promieniami kół równoważnych tym powierzchniom, — czyli w omawianym przypadku promieniami kół równoważnych *sumom* powierzchni pól składających się na dany poziom hipsometryczny. Ma to dla kształtu krzywej hipsografoidalnej doniosłe konsekwencje. Jej nachylenie staje się mianowicie zależne od ilości pól składowych.

Przykład:



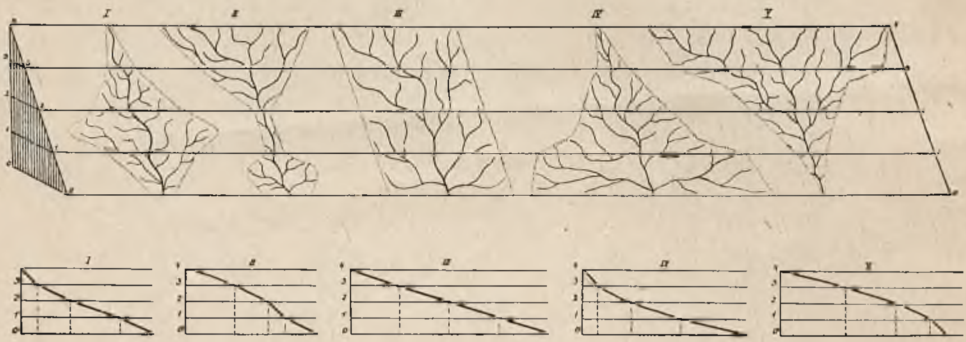
Rys. 4.

Niech dla prostego stożka różnica promieni dwóch przekrojów poziomych o odstępie pionowym (h) wynosi $R_1 - r_1 = a$. Jest ona miarą nachylenia pobocznicy stożka w myśl wzoru $tg\ \alpha = \frac{h}{a}$ i znajdzie wyraz w tem samem nachyleniu krzywej hipsografoidalnej. Jeśli to samo piętro hipsometryczne reprezentowane jest w pewnym obszarze nie przez jeden, lecz przez dwa, trzy, cztery, etc. takie stożki, wówczas stosunki spadkowe w obrębie tego piętra pozostaną niezmienne, gdyż wszystkie składające się na to piętro stożki są identyczne, pobocznice ich mają ten sam kąt spadku odpowiadający poziomemu odstępowi izohips (a). Ale decydująca o nachyleniu krzywej hipsografoidalnej tego piętra różnica promieni kół, równoważnych sumom poziomych przekrojów tych stożków, zmieniać będzie wartość. Gdy dla jednego stożka $R_1 - r_1 = a$, to dla obszaru, na który składają się dwa takie same stożki $R_2 - r_2 = a \,.\sqrt{2}$, przy trzech stożkach $R_3 - r_3 = a \,.\sqrt{3}$, przy czterech $R_4 - r_4 = 2\,a$, etc. Ogólnie, gdy ilość ich wynosi (n), wtedy $R_n - r_n = a \sqrt{n}$. Rozmaite więc, i zależne od ilości form składowych, nachylenia wykaże krzywa hipsografoidalna dla odnośnego piętra hipsometrycznego, — mimo, że za każdym razem występujące w obrębie tego piętra powierzchnie mają ten sam spadek.

3. Zasadniczo błędne wyniki dawać musi wnioskowanie o stosunkach spadkowych w obrębie poszczególnych dorzeczy na podstawie ich krzywych hipsografoidalnych. Dorzecze, jako obszar ograniczony linją działu wodnego przecinającą różne warstwice, obejmuje wycinki szeregu stref hipsometrycznych. Decydujący dla przebiegu krzywej hipsografoidalnej stosunek ich powierzchni jest w pierwszym rzędzie

zależny od przebiegu linji obwodowej, od kształtu dorzecza a nie jego spadku.

Przykład:



Rys. 5. Krzywe hipsografoidalne dorzeczy o różnym kształcie a tym samym spadku.

Przyjmijmy na obszarze równomiernie nachylonym kilka dorzeczy rozmaitego kształtu (rys. 5). Dzięki ich różnej formie stosunek powierzchni leżących w różnych strefach wysokościowych jest w każdem z nich inny. Niech np. stosunek ten wynosi dla dorzecza I (zaczynając od strefy najwyższej) 1:4:9:4, dla II 9:4:1:4, dla III 9:9:9:9, dla IV 1:4:9:16, dla V 16:9:4:1. Mimo, że spadek terenu jest we wszystkich dorzeczach ten sam, każdemu odpowie odmienna krzywa hipsografoidalna. Dla dorzecza I jest ona linją w części górnej wklęsłą, w dolnej wypukłą, dla II odwrotnie, dla III jednostajnie pochyloną prostą, dla IV w całości wklęsłą, dla V w całości wypukłą. Wnioskowanie z wyglądu tych krzywych o zróżnicowaniu nachylenia terenu w różnych piętrach wysokościowych jest więc niedopuszczalne,[3] podobnie jak obliczanie na ich podstawie średniego spadku dorzecza. Dotyczy to zresztą każdego obszaru wydzielonego na podstawie kryterjum nie hipsometrycznego, a więc każdego nie ograniczonego wspólną izohipsą.

4. Wogóle stwierdzić można, że krzywa hipsografoidalna stosunków nachylenia powierzchni w zasadzie nie oddaje. Jest to prostą konsekwencją matematycznych podstaw jej konstrukcji.

Istnieją jednak morfograficzne konstrukcje uzmysławiające bezpośrednio wielkość średniego spadku w poszczególnych piętrach

[3] To też E. Romer interpretując hipsografoidy Nilu i Kongo wiąże ich załamanie w wys. 300 m z słabem rozwinięciem dorzeczy w dolnym biegu — a nie z wzmożeniem ich spadku.

hipsometrycznych i pozwalające na graficzne określenie średniego spadku całej powierzchni.

Przedewszystkiem przypomnieć tu należy t. z. *krzywą hipsoklinograficzną* Finsterwaldera, o której, opierając się na listownej informacji jej autora, podał wiadomość Penck (Morphol. der Erdoberfl. I, 51) błędnie zresztą jej rysunek objaśniając. Powstaje ona przez zestawienie szeregu konstrukcyj, wykonanych osobno dla każdego piętra hipsometrycznego na podstawie wzoru $\operatorname{tg} a = h \cdot \frac{i_1 + i_2}{2} : p$, a mianowicie przez przyjęcie wielkości powierzchni poziomej (p) ograniczonej rzutami dwóch izohips jako jednej przyprostokątnej, zaś iloczynu średniej arytmetycznej długości tych izohips (i_1, i_2) przez ich odstęp pionowy (h) jako drugiej. Zestawienie tych konstrukcyj przeprowadza się wedle hipsometrycznego następstwa pięter warstwicowych tak, by przeciwprostokątnie, (których nachylenie względem poziomu odpowiada średniemu spadkowi w danem piętrze), stykając się z sobą bezpośrednio tworzyły jedną linję łamaną. Prosta łącząca jej końce wyznacza średni spadek całej powierzchni.

Podkreślić należy, że w konstrukcji powyższej skala wysokości nie jest jednolita, dla każdego piętra hipsometrycznego jest ona inna.

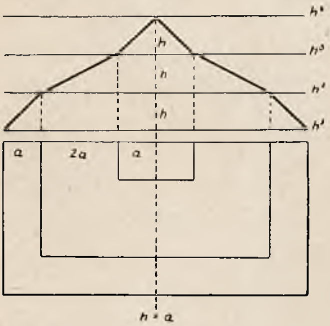
Gdy chodzi o konstrukcję morfograficzną „wiernokątową“, w której zostałaby utrzymana jednolitość skali wysokościowej, jest nią krzywa, dla której proponuję nazwę *krzywej hipsoklinalnej*. Jest to diagram, w którym współrzędnemi pionowemi są wzniesienia izohips: h_1, $h_1 + h_2$, $h_1 + h_2 + h_3$ ... etc. — zaś poziomemi ich średnie odstępy poziome: a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$ ... etc., obliczone wzorem $a_m = \frac{2\, p_m}{i_{m-1} + i_m}$. Jeśli na jedno piętro hipsometryczne składa się dwa lub więcej izolowanych pól warstwicowych, wówczas wartość średnią dla (a) oblicza się uwzględniając wielkości powierzchni pól składowych jako obciążenie, czyli:

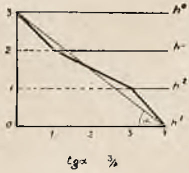
$$a_s = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}.$$

Całość diagramu przedstawia linję łamaną, będącą syntetycznym profilem rozważanej powierzchni. Prosta, łącząca jego skrajne punkty, ma nachylenie odpowiadające średniemu spadkowi całej powierzchni, gdyż $\frac{H}{\Sigma a} = \operatorname{tg} a$.

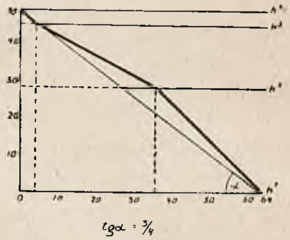
Rys. 6 przedstawia krzywą hipsoklinalną i hipsoklinograficzną dla tej samej, obok w przekroju i rzucie podanej, formy. Mimo, że krzywe

te mają różną postać, odczytujemy na nich ten sam średni spadek w danych piętrach hipsometrycznych, oraz ten sam średni spadek ogólny, tg $\alpha = {}^3/_4$





Krzywa hipsoklinalna



Krzywa hipsoklinograficzna

Rys. 6.

W zastosowaniu do morfografji stosunków spadkowych obie krzywe te same dają wyniki i jednakową przedstawiają wartość. Różnica ich zasadnicza polega na tem, że gdy krzywa hipsoklinalna z wiernością (średniego) spadku łączy wymierność wysokości (t. j. jednolitą skalę hipsometryczną), — krzywa hipsoklinograficzna zamiast tej właściwości posiada wymierność powierzchni, w czem podobna jest do krzywej hipsograficznej.

Résumé.

L'auteur démontre, que l'hypsographoïde du M. F. Uhorczak (C. R. Congr. Internat. Géogr. Paris 1931. I. 328), dont le profil est une transformation de la courbe hypsographique, ne represente pas (à l'éxception de cônes) les pentes moyennes des zones hypsométriques et ne peut pas servir à l'étude comparée d'inclinaison du terrain.

Pourtant il y a deux constructions, qui donnent une perception directe de la pente moyenne des zones hypsométriques et permette de trouver la pente moyenne de la surface totale. Ce sont:

1. La courbe hypsoclinographique de Finsterwalder, décrite par A. Penck (Morphol. der Erdoberfl. I, 51) — et

2. La courbe hypsoclinale, c. à. d. un diagramme dont les abscisses sont répresentées par les hauteurs des courbes de niveau, et les ordonnées par les moyennes distances verticales (a) de ces courbes, calculées d'après la formule: $a = \frac{2\,p_1}{i_1 + i_2}$, — ou ($p_1$) est l'areal de la surface horizontale entre les projéctions de deux courbes de niveau, et (i_1, i_2) la longuer de ces courbes.

L'inclinaison de la ligne droite liante les points éxtrémes de la courbe hypsoclinale marque la pente moyenne de la surface totale:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} = \frac{H}{\Sigma a}.$$

Les valeurs des pentes moyennes obtenues d'après la courbe hypsoclinographique et hypsoclinale sont identiques.